Profesor:
Ricardo Espino L.

ÁLGEBRA

GRUPO PITÁGORAS

PITAGORAS ACADEMIA

ECUACIONES POLINOMIALES

DEFINICIONES

- ECUACIÓN
- SOLUCIÓN
- CONJUNTO SOLUCIÓN
- ECUACIONES EQUIVALENTES

ECUACIONES POLINOMIALES

- ECUACIÓN BICUADRADA
- ECUACIÓN RECÍPROCA

ECUACIONES POLINOMIALES

- ECUACION BINOMIA
- ECUACIÓN TRINOMIA

ECUACIÓN

1.- DEFINICIÓN:

Igualdad condicional, definida en cierto conjunto, en la cual se presentan ciertas variables cuyo valor es desconocido. A estas variables desconocidas se les conoce como INCÓGNITAS y encontrar dichos valores será el objetivo al resolver la ecuación.

2.-TIPOS DE ECUACIÓN

ECUACIONES ALGEBRAICAS:

1. Ecuaciones Polinomiales
2. Ecuaciones Racionales
3. Ecuaciones Irracionales

ECUACIONES TRASCENDENTES:

1. Ecuaciones Trigonométricas
2. Ecuaciones logarítmicas

ECUACIONES DIFERENCIALES

ECUACIONES INTEGRALES

ECUACIONES FUNCIONALES

3.- SOLUCIÓN

Valor o valores de la incógnita que satisface la igualdad.

4.- CONJUNTO SOLUCIÓN

Conjunto cuyos elementos son todas las soluciones de la ecuación.

5.- Ecuaciones Equivalentes

Aquellas ecuaciones que poseen el mismo conjunto solución.

EJM: Resolver en R

$$\frac{x}{2} - 2 = 1$$
$$\frac{x}{2} = 3$$
$$x = 6$$

$$C.S. = \{6\}$$

EJM: Resolver en R

$$x^2 - 12x + 36 = 0$$
$$(x-6)^2 = 0$$
$$x - 6 = 0$$
$$x = 6$$

$$C.S. = \{6\}$$

OBSERVACIÓN1:

Es importante reconocer el conjunto en el cual se define la ecuación para así determinar el conjunto solución.

Ejemplo:

Resolver en $\mathbb{R}$

$$3x^2 + 5x - 2 = 0$$

$$(3x - 1)(x + 2) = 0$$

$$(3x - 1) = 0 \quad \vee \quad x + 2 = 0$$

$$x = \frac{1}{3} \vee x = -2$$

$$C.S. = \left\{\frac{1}{3}; -2\right\}$$

Ejemplo:

Resolver en $\mathbb{Z}$

$$3x^2 + 5x - 2 = 0$$

$$(3x - 1)(x + 2) = 0$$

$$(3x - 1) = 0 \quad \vee \quad x + 2 = 0$$

$$x = \frac{1}{3} \vee x = -2$$

$$C.S. = \{-2\}$$

En este caso, 1/3 no es solución de la ecuación ya que se pide resolver la ecuación en $\mathbb{Z}$

OBERVACIÓN2:

Al resolver ecuaciones en las cuales se observa radicales pares y denominadores, es necesario verificar que las soluciones no irrumpan las siguientes restricciones.

$$\sqrt[2k]{P(x)} \in \mathbb{R}\ entonces\ \ P(x) \geq 0$$

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \in \mathbb{R}\ \ entonces\ \ Q(x) \neq 0$$

EJEMPLO: Resolver en $\mathbb{R}$

$$\sqrt{x-2} = 4 - x$$

$$x - 2 = 16 - 8x + x^2$$
$$x^2 - 9x + 18 = 0$$
$$(x-3)(x-6) = 0$$
$$x = 3 \quad \vee \quad x = 6$$

Y se observa que si x=6

$$\sqrt{6-2} = 4 - 6$$

Lo cual es evidentemente falso.

$$C.S. = \{3\}$$

PROBLEMA:

11. Resolver la ecuación irracional:

$$6x^2 + 15x - 49 = \sqrt{2x^2 + 5x + 7}$$

e indique una de sus soluciones.

A) -7/2 B) 5/2 C) -3/2

D) -9/2 E) 3/2

SOLUCIÓN:

$Utilizando\ el\ cambio\ de\ variable$:

$$y = 2x^2 + 5x \quad de\ donde \quad 3y = 6x^2 + 15x$$

$$3y - 49 = \sqrt{y + 7}$$

$$9y^2 - 294y + 2401 = y + 7$$

$$9y^2 - 295y + 2394 = 0$$

$$(y - 18)(9y - 133) = 0$$

$$y = \frac{133}{9} \quad \vee \quad y = 18$$

Pero se observa que y=133/9 no satisface la ecuación

$$y = 18$$

$$2x^2 + 5x = 18$$

$$2x^2 + 5x - 18 = 0$$

$$(2x - 9)(x + 2) = 0$$

$$x = \frac{9}{2} \qquad x = -2$$

ECUACIÓN BICUADRADA

$$Forma:$$

$$ax^4 + bx^2 + c = 0$$

PROPIEDADES

1. SI α es una solución de la ecuación, entonces $-\alpha$ también será una solución de la ecuación.
2. El conjunto solución tiene la forma:

$$C.S. = \{\alpha, -\alpha, \beta, -\beta\}$$

   donde $\alpha + \beta \neq 0$

3. Además se cumple:

$$\alpha^2 + \beta^2 = -\frac{b}{a}$$

4. $$\alpha^2\beta^2 = \frac{c}{a}$$

EJM:

$$x^4 - 13x^2 + 36 = 0$$

SOLUCIÓN.

Cambio de variable:

$$y = x^2$$

$$y^2 - 13y + 36 = 0$$
$$(y - 9)(y - 4) = 0$$
$$y = 9 \ \vee y = 4$$

$$x^2 = 9 \ \vee x^2 = 4$$

$$x = 3 \ \vee x = -3 \ \vee x = 2 \ \vee x = -2$$

$$C.S. = \{3, -3, 2, -2\}$$

PROBLEMA:

01. Si x_1, x_2, x_3 y x_4 son las raíces de la siguiente ecuación bicuadrada:

$$(5t^2+2)x^4 - (4t^4+9)x^2 + 3(t^2+2) = 0$$

tal que el producto de sus cuatro raíces es 1, entonces la suma de la menor raíz negativa con la menor raíz positiva es:

A) $-\frac{\sqrt{3}}{6}$ B) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ C) $\frac{\sqrt{3}}{6}$

D) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ E) $-\frac{\sqrt{6}}{3}$

SOLUCIÓN:

Recordando:

$$P(x) = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E$$

con raíces c_1, c_2, c_3, c_4

$$c_1c_2c_3c_4 = \frac{E}{A}$$

Reemplazando el dato: $c_1c_2c_3c_4 = \frac{E}{A}$

$$c_1c_2c_3c_4 = \frac{3(t^2+2)}{5t^2+2} = 1$$

$$de\ donde\ se\ obtiene\ t^2 = 2$$

$$Además\ t^4 = 4$$

Reemplazando:

$$12x^4 - 25x^2 + 12 = 0$$

$$(3x^2 - 4)(4x^2 - 3) = 0$$

$$x^2 = \frac{4}{3} \lor x^2 = \frac{3}{4}$$

$$x = \frac{2}{\sqrt{3}} \lor x = -\frac{2}{\sqrt{3}} \lor x = \frac{\sqrt{3}}{2} \lor x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Menor raíz negativa: $-\frac{2}{\sqrt{3}}$ Menor raíz positiva: $\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\frac{-2}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{-4+3}{2\sqrt{3}} = \frac{-1}{2\sqrt{3}} = \frac{-1\sqrt{3}}{2\sqrt{3}.\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{6}$$

PROBLEMA:

03. Si una raíz de la ecuación bicuadrada de coeficientes reales es: 2 - 3i, la ecuación bicuadrada será:

A) $x^4 - 10x^2 + 169 = 0$
B) $x^4 + 10x^2 + 169 = 0$
C) $x^4 - 10x^2 - 169 = 0$
D) $x^4 + 16x^2 + 169 = 0$
E) $x^4 - 13x^2 + 100 = 0$

SOLUCIÓN1:

Recordando:

1. Paridad de raíces en un polinomio con coeficientes reales
2. Simetría de las soluciones en una ecuación bicuadrada
3. Descomposición en factores lineales.

✓ Por la paridad de raíces (coeficientes reales)

Si el polinomio admite como raíz a **2-3i**

Entonces otra raíz será **2+3i**

✓ Por la simetría de las soluciones

Si una solución es **2-3i**, también otra solución será **-2+3i**

Si una solución es **2+3i**, también otra solución será **-2-3i**

Generando la ecuación:

$$\left(x-(\mathbf{2}-\mathbf{3}\boldsymbol{i})\right)\left(x-(\mathbf{2}+\mathbf{3}\boldsymbol{i})\right)\left(x-(-\mathbf{2}+\mathbf{3}\boldsymbol{i})\right)\left(x-(-\mathbf{2}-\mathbf{3}\boldsymbol{i})\right)=0$$

$$(x^2-4x+13)(x^2+4x+13)=0$$

$$x^4+10x^2+169=0$$

PROBLEMA:

03. Si una raíz de la ecuación bicuadrada de coeficientes reales es: 2 - 3i, la ecuación bicuadrada será:

A) $x^4 - 10x^2 + 169 = 0$
B) $x^4 + 10x^2 + 169 = 0$
C) $x^4 - 10x^2 - 169 = 0$
D) $x^4 + 16x^2 + 169 = 0$
E) $x^4 - 13x^2 + 100 = 0$

SOLUCIÓN2:

$$x = 2 - 3i$$

$$Para\ generar\ coeficientes\ reales, se\ debe\ eliminar\ la\ unidad\ imaginaria$$

$$(x-2)^2 = (-3i)^2$$

$$x^2 - 4x + 4 = -9$$

$$x^2 - 4x + 13 = 0$$

$$Para\ generar\ la\ simetría\ de\ las\ soluciones:$$

$$x^2 + 13 = 4x$$

$$(x^2+13)^2 = (4x)^2$$

$$x^4 + 26x^2 + 169 = 16x^2$$

$$x^4 + 10x^2 + 169 = 0$$

ECUACIÓN RECÍPROCA

Ecuación en la cual se cumple que si una solución es α distinta de cero, $\frac{1}{\alpha}$ también es solución.

Forma:

$$Ax^2 + Bx + A = 0$$
$$Ax^3 + Bx^2 + Bx + A = 0$$
$$Ax^3 + Bx^2 - Bx - A = 0$$
$$Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Bx + A = 0$$
$$Ax^5 + Bx^4 + Cx^3 + Cx^2 + Bx + A = 0$$
$$Ax^5 + Bx^4 + Cx^3 - Cx^2 - Bx - A = 0$$

Observación:

En las ecuaciones polinomiales recíprocas de grado impar, una solución será 1 o -1.

Ejemplo:

Resolver:

$$6x^4 + 5x^3 - 38x^2 + 5x + 6 = 0$$

Solución:

Es evidente que x≠0, esto permite poder dividir a toda la ecuación entre x^2

$$\frac{6x^4}{x^2} + \frac{5x^3}{x^2} - \frac{38x^2}{x^2} + \frac{5x}{x^2} + \frac{6}{x^2} = 0$$

$$6x^2 + 5x - 38 + \frac{5}{x} + \frac{6}{x^2} = 0$$

$$6\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 5\left(x + \frac{1}{x}\right) - 38 = 0$$

$$6\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+5\left(x+\frac{1}{x}\right)-38=0$$

Utilizando el cambio de variable:

$$y=x+\frac{1}{x}$$

$$y^2=x^2+2.x.\frac{1}{x}+\left(\frac{1}{x}\right)^2$$

$$y^2=x^2+2+\frac{1}{x^2} \qquad entonces\ y^2-2=x^2+\frac{1}{x^2}$$

Reemplazando en la ecuación:

$$6(y^2-2)+5y-38=0$$

$$6y^2+5y-50=0$$

$$(3y+10)(2y-5)=0$$

$$y=-\frac{10}{3} \qquad \vee \qquad y=\frac{5}{2}$$

POLINOMIO REAL DE UNA VARIABLE Y GRADO "n"

$$x + \frac{1}{x} = -\frac{10}{3} \quad \vee \quad x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2}$$

$$3x^2 + 10x + 3 = 0 \quad \vee \quad 2x^2 - 5x + 2 = 0$$

$$(3x + 1)(x + 3) = 0 \quad \vee \quad (2x - 1)(x - 2) = 0$$

$$x = -\frac{1}{3} \vee x = -3 \vee x = \frac{1}{2} \vee x = 2$$

$$C.S. = \left\{-\frac{1}{3}, -3, \frac{1}{2}, 2\right\}$$

PITAGORAS ACADEMIA

PROBLEMA:

09. Calcular la mayor de las raíces de:

$$12x^4 + 91x^3 + 194x^2 + 91x + 12 = 0$$

A) -1 B) -1/3 C) -1/4

D) -4 E) 1/4

SOLUCIÓN:

Es evidente que x≠0, esto permite poder dividir a toda la ecuación entre x^2

$$\frac{12x^4}{x^2}+\frac{91x^3}{x^2}+\frac{194x^2}{x^2}+\frac{91x}{x^2}+\frac{12}{x^2}=0$$

$$12x^2+91x+194+\frac{91}{x}+\frac{12}{x^2}=0$$

$$12\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+91\left(x+\frac{1}{x}\right)+194=0$$

Utilizando el cambio de variable:

$$y=x+\frac{1}{x}$$

Reemplazando en la ecuación:

$$12(y^2-2)+91y+194=0$$

$$12y^2+91y+170=0$$

$$(3y+10)(4y+17)=0$$

$$y=-\frac{10}{3} \quad \vee \quad y=-\frac{17}{4}$$

$$x+\frac{1}{x}=-\frac{10}{3} \quad \vee \quad x+\frac{1}{x}=-\frac{17}{4}$$

$$3x^2+10x+3=0 \quad \vee \quad 4x^2+17x+4=0$$

$$(3x+1)(x+3)=0 \quad \vee \quad (4x+1)(x+4)=0$$

$$x=-\frac{1}{3} \vee x=-3 \vee x=-\frac{1}{4} \vee x=-4$$

PITAGORAS ACADEMIA

PROBLEMA:

15. Sea el polinomio mónico P(x), tal que:

$$P(x) \equiv x^5 P\left(\frac{1}{x}\right)$$

Calcular el producto de los coeficientes de P(x), si la suma de sus coeficientes es 18 y P(2) = 159

A) 196 B) 225 C) 169
D) 256 E) 289

SOLUCIÓN:

$$Si\ el\ polinomio\ P(x) cumple:$$

$$P(x) = x^5 P\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$Entonces\ P(x) es\ de\ 5to\ grado\ y\ además$$

$$P(x) = Ax^5 + Bx^4 + Cx^3 + Dx^2 + Ex + F$$

$$Ax^5 + Bx^4 + Cx^3 + Dx^2 + Ex + F \equiv x^5\left(\frac{A}{x^5} + \frac{B}{x^4} + \frac{C}{x^3} + \frac{D}{x^2} + \frac{E}{x} + F\right)$$

$$Ax^5 + Bx^4 + Cx^3 + Dx^2 + Ex + F \equiv Fx^5 + Ex^4 + Dx^3 + Cx^2 + Bx + A$$

$$A = F \qquad B = E \qquad C = D$$

$$P(x) = Ax^5 + Bx^4 + Cx^3 + Cx^2 + Bx + A$$

$$A = 1\ ya\ que\ P(x) es\ mónico$$

$$P(x) = x^5 + Bx^4 + Cx^3 + Cx^2 + Bx + 1$$

$$Suma\ de\ coef. = 1 + B + C + C + B + 1 = 18 \qquad B + C = 8$$

$$P(2) = 32 + 16B + 8C + 4C + 2B + 1 = 159 \qquad 3B + 2C = 21$$

$$B = 5 \quad C = 3$$

$$P(x) = x^5 + 5x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 5x + 1$$

ECUACIÓN BINOMIA

$$Forma: \quad x^n - a = 0$$

Propiedades:

1. Si n es impar, entonces solo habrá 1 solución real.
2. Si n es par y a es un real positivo entonces solo habrá 2 soluciones reales.
3. Si n es par y a es un real negativo entonces no habrá ninguna solución real.

Método de solución:

Mediante la fórmula de De Moivre se obtiene:

$$x^n - a = 0$$
$$x^n = a$$

$$x = \sqrt[n]{a}\left(cos\frac{2k\pi}{n} + isen\frac{2k\pi}{n}\right)$$

$$k \in \{0, 1, 2, 3, \ldots, n-1\}$$

PROBLEMA:

05. Con respecto a la siguiente ecuación:

$$x^{29} + 2\pi x^{20} - \pi x^9 - 2\pi^2 = 0$$

podemos afirmar:

A) Admite 5 raíces reales y 24 raíces imaginarias
B) Admite 3 raíces reales y 26 raíces imaginarias
C) Admite 1 raíz real y 28 raíces imaginarias
D) Todas sus raíces son reales
E) Todas sus raíces son imaginarias

SOLUCIÓN:

Factorizando:

$$x^{29} - \pi x^9 + 2\pi x^{20} - 2\pi^2 = 0$$

$$x^9(x^{20} - \pi) + 2\pi(x^{20} - \pi) = 0$$

$$(x^9 + 2\pi)(x^{20} - \pi) = 0$$

$x^9 + 2\pi = 0$ $\quad$ 1 *solución real y* 8 *imaginarias*

$x^{20} - \pi = 0$ $\quad$ 2 *solución reales y* 18 *imaginarias*

3 *soluciones reales y* 26 *imaginarias*.

Ejemplo:
Resolver

$$x^6 - 64 = 0$$

Solución:

$$x^6 = 64$$

$$x = \sqrt[n]{a}\left(cos\frac{2k\pi}{n} + isen\frac{2k\pi}{n}\right)$$

$$k \in \{0, 1, 2, 3, \ldots, n-1\}$$

Reemplazando $n = 6 \quad a = 64$

$$x = \sqrt[6]{64}\left(cos\frac{2k\pi}{6} + isen\frac{2k\pi}{6}\right)$$

$$k \in \{0, 1, 2, 3, 4,5\}$$

$$x = 2\left(cos\frac{k\pi}{3} + isen\frac{k\pi}{3}\right)$$
$$k \in \{0, 1, 2, 3, 4,5\}$$

Reemplazando para los distintos valores de k:

$$k = 0 \qquad x = 2(cos0 + isen0) = 2$$
$$k = 1 \qquad x = 2\left(cos\frac{\pi}{3} + isen\frac{\pi}{3}\right) = 1 + \sqrt{3}i$$
$$k = 2 \qquad x = 2\left(cos\frac{2\pi}{3} + isen\frac{2\pi}{3}\right) = -1 + \sqrt{3}i$$
$$k = 3 \qquad x = 2\left(cos\frac{3\pi}{3} + isen\frac{3\pi}{3}\right) = -2$$
$$k = 4 \qquad x = 2\left(cos\frac{4\pi}{3} + isen\frac{4\pi}{3}\right) = -1 - \sqrt{3}i$$
$$k = 5 \qquad x = 2\left(cos\frac{5\pi}{3} + isen\frac{5\pi}{3}\right) = 1 - \sqrt{3}i$$

ECUACIÓN TRINOMIA

$$Forma: \quad ax^{2n} + bx^n + c = 0 \quad , abc \neq 0$$

Método de solución:

Al hacer el cambio de variable:

$$x^n = y$$

Se obtiene la ecuación de 2do grado:

$$ay^2 + by + c = 0$$

De donde se obtienen las soluciones para y, lo cual nos permite hallar las soluciones para x.

ECUACIÓN TRINOMIA

$$Forma: \quad x^{12} + 8x^6 - 9 = 0 \quad , abc \neq 0$$

Método de solución:

Al hacer el cambio de variable:

$$\boldsymbol{x^6 = y}$$

Se obtiene la ecuación de 2do grado:

$$y^2 + 8y - 9 = 0$$
$$(y + 9)(y - 1) = 0$$
$$y = -9 \quad o \quad y = 1$$
$$\boldsymbol{x^6 = -9} \quad o \quad \boldsymbol{x^6 = 1}$$

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA:

02. Dada la ecuación bicuadrada:

$x^4 + (b - a)(x^3 + 1) + (x - 1)^3 - c(x + 3) - 1 = 0$

el producto de sus raíces es:

A) 6 B) -12 C) -14
D) 12 E) 14

SOLUCIÓN:

$Operando$:

$$x^4 + (b-a)x^3 + (b-a) + x^3 - 3x^2 + 3x - 1 - cx - 3c - 1 = 0$$

$$x^4 + (b-a+1)x^3 - 3x^2 + (3-c)x + (b-a-3c-2) = 0$$

$b - a + 1 = 0 \qquad b - a = -1$

$3 - c = 0 \qquad c = 3$

Reemplazando:

$$x^4 - 3x^2 - 12 = 0$$

Producto de raíces: -12

PROBLEMA:

04. Sean x_1 y x_2 raíces de la ecuación bicuadrada:

$$(p-5)x^4 - (3p-23)x^2 + 9 = 0$$

tal que $x_2=3x_1$. Calcular el mayor valor de "p"

SOLUCIÓN:

Por el dato del problema: $C.S. = \{\alpha, -\alpha, 3\alpha, -3\alpha\}$

Además:

$$\alpha^2 + (3\alpha)^2 = \frac{3p-23}{p-5}$$

$$10\alpha^2 = \frac{3p-23}{p-5}$$

$$\alpha^2 = \frac{3p-23}{10(p-5)}$$

Además:

$$\alpha^2.(3\alpha)^2 = \frac{9}{p-5}$$

1. $\alpha^2 + \beta^2 = -\frac{b}{a}$
2. $\alpha^2\beta^2 = \frac{c}{a}$

$$9\alpha^4 = \frac{9}{p-5}$$

$$(\alpha^2)^2 = \frac{1}{p-5}$$

$$\left(\frac{3p-23}{10(p-5)}\right)^2 = \frac{1}{p-5}$$

$$9p^2 - 238p + 1029 = 0$$

$$(p-21)(9p-49) = 0$$

PROBLEMA:

06. Calcule usted el producto de las raíces imaginarias de la siguiente ecuación:

$$x^{15} + 2x^{10} - 5x^5 - 10 = 0$$

A) $\sqrt[5]{10\,000}$ B) $\sqrt[5]{1\,000}$ C) $\sqrt[5]{100}$

D) $\sqrt[5]{10}$ E) $10\sqrt[5]{10}$

SOLUCIÓN:

Factorizando:

$$x^{15} - 5x^5 + 2x^{10} - 10 = 0$$

$$x^5(x^{10} - 5) + 2(x^{10} - 5) = 0$$

$$(x^5+2)(x^{10} - 5) = 0$$

$x^5 + 2 = 0$ $\quad$ *1 solución real y 4 imaginarias*

solución real: $\sqrt[5]{-2}$

$x^{10} - 5 = 0$ $\quad$ *2 solución reales y 8 imaginarias*

soluciones reales: $\sqrt[10]{5}$ $\quad$ $-\sqrt[10]{5}$

Pero además se sabe que el producto de las 15 raíces del polinomio

$$c_1 c_2 c_3 c_4 \ldots c_{15} = 10$$

$$(\sqrt[5]{-2})(\sqrt[10]{5})(-\sqrt[10]{5}.)\ c_4 \ldots c_{15} = 10$$

$$c_4 \ldots c_{15} = \frac{10}{\sqrt[5]{10}} = \sqrt[5]{10000}$$

PROBLEMA:

07. Determine el conjunto de valores de “a” para que la ecuación bicuadrada:

$$x^4 + (a + 2)x^2 + (a + 4) = 0$$

tenga solamente raíces reales.

A) [-4; -1] B) [-4; -2] C) [-4; +∞>

D) [-4; $-\sqrt{12}$] E) <-∞; -2]

SOLUCIÓN:

$Utilizando\ el\ cambio\ de\ variable:$

$$y = x^2$$

$$y^2 + (a+2)y + a + 4 = 0$$

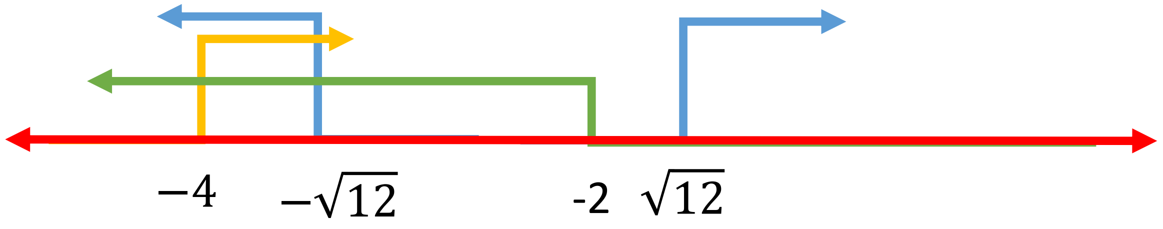
$Para\ que\ los\ valores\ de\ x\ sean\ reales, los\ valores\ de\ y\ deben\ ser\ reales\ no\ negativos$

$$\Delta \geq 0 \quad \wedge \quad -(a+2) \geq 0 \wedge a + 4 \geq 0$$

$$(a+2)^2 - 4(a+4) \geq 0 \wedge (a+2) \leq 0 \wedge a \geq -4$$

$$a^2 - 12 \geq 0 \wedge a \leq -2 \wedge a \geq -4$$

$$\left(a \leq -\sqrt{12} \ \vee \ a \geq \sqrt{12}\right) \wedge a \leq -2 \wedge a \geq -4$$



$$Rpta: \quad a \in \left[-4; -\sqrt{12}\right]$$

PITAGORAS ACADEMIA

PROBLEMA:

10. Hallar la solución de la ecuación polinómica P(x) = 7, conociendo que el polinomio P verifica las relaciones:

$$P(x) \equiv x^4 P\left(\frac{1}{x}\right)$$

$P(0) = P(1) = P(-1) = 1$

A) $\sqrt{2}$ B) $\sqrt{3}$ C) 2
D) 3 E) 3/5

SOLUCION:

$$Si\ el\ polinomio\ P(x) cumple:$$

$$P(x) = x^4 P\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$Entonces\ P(x) es\ de\ 4to\ grado\ y\ además$$

$$P(x) = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Bx + A$$

$$P(0) = A = 1$$

$$P(x) = x^4 + Bx^3 + Cx^2 + Bx + 1$$

$$P(1) = 2B + C + 2 = 1 \qquad 2B + C = -1$$

$$P(-1) = -2B + C + 2 = 1 \qquad -2B + C = -1$$

$$B = 0 \qquad C = -1$$

$$P(x) = x^4 - x^2 + 1$$

$$x^4 - x^2 + 1 = 7$$

$$x^4 - x^2 + 1 = 7$$

$$x^4 - x^2 - 6 = 0$$

$$(x^2 - 3)(x^2 + 2) = 0$$

$$(x^2 - 3) = 0 \quad \vee \quad (x^2 + 2) = 0$$

$$x = \sqrt{3} \quad x = -\sqrt{3} \quad x = \sqrt{2}i \quad x = -\sqrt{2}i$$

PROBLEMA:

13. Sabiendo que a, b y c son las raíces de:

$$P(x) \equiv x^3 - 5x + 1$$

calcular el valor de:

$$E = \frac{1}{5-a^2} + \frac{1}{5-b^2} + \frac{1}{5-c^2}$$

A) -1 B) 1 C) 2
D) -2 E) 0

SOLUCIÓN:

Se sabe que:

$$a + b + c = 0$$

$$ab + bc + ac = -5$$

$$abc = -1$$

Además:

$$a^3 - 5a + 1 = 0$$

$$1 = 5a - a^3$$

$$1 = a(5 - a^2)$$

$$\frac{1}{5 - a^2} = a$$

Análogamente

$$\frac{1}{5 - b^2} = b \qquad \frac{1}{5 - c^2} = c$$

$$E = a + b + c = 0$$

PROBLEMA:

14. Dada la ecuación polinomial:

$Ax^5 + Bx^4 + Cx^3 + Cx^2 + Bx + A = 0,\ A \neq 0$

de coeficientes reales, tal que la suma de dos de sus raíces es 2 y el producto de las mismas es -4, calcular: $-\frac{B}{A}$

A) 1/4 B) -1/2 C) 1
D) 1/2 E) -1/4

SOLUCIÓN:

$Datos$:

$$\alpha + \beta = 2$$

$$\alpha\beta = -4$$

$Además$:

-1 es una solución de la ecuación

$Además, debido\ a\ la\ forma\ del\ polinomio$

$$\frac{1}{\alpha}\quad y\quad \frac{1}{\beta}\quad también\ son\ soluciones$$

Finalmente:

$$Suma\ de\ raíces\ del\ polinomio = -\frac{B}{A}$$

$$\alpha + \beta + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + (-1) = -\frac{B}{A}$$

$$2 + \frac{2}{-4} - 1 = -\frac{B}{A}$$

$$\frac{1}{2} = -\frac{B}{A}$$

PROBLEMA:

16. Formar la ecuación cuyas raíces sean las de:

$$x^4 - 2x^3 + x - 1 = 0$$

disminuidas en 4 unidades. Indicar el término cuadrático.

A) $24x^2$ B) $72x^2$ C) $14x^2$
D) $141x^2$ E) $131x^2$

SOLUCIÓN:

$Transformación\ de\ ecuaciones$

$$y = x - 4$$

$Despejando\ x:$

$$x = y + 4$$

$Reemplazando:$

$$(y+4)^4 - 2(y+4)^3 + (y+4) - 1 = 0$$

$$y^4 + 16y^3 + 96y^2 + 256y + 256 - 2(y^3 + 12y^2 + 48y + 64) + (y+4) - 1 = 0$$

$$y^4 + 14y^3 + 72y^2 + 161y + 131 = 0$$

PITAGORAS ACADEMIA

PROBLEMA:

18. Encuentre el módulo de la diferencia de las raíces imaginarias de la ecuación:

$$z^3+\frac{1}{z^3}=6\left(z+\frac{1}{z}\right)$$

A) 4 B) 6 C) 2
D) 1 E) 3

SOLUCIÓN:

$Cambio\ de\ variable$:

$$y=z+\frac{1}{z}$$

$$z^3+\frac{1}{z^3}=y^3-3y$$

$Reemplazando$:

$$y^3-3y=6y$$

$$y^3-9y=0$$

$$y(y+3)(y-3)=0$$

$$y=0 \vee \ y=-3 \vee \ \ y=3$$

$$z+\frac{1}{z}=0 \vee z+\frac{1}{z}=-3 \vee z+\frac{1}{z}=3$$

$$z^2 + 1 = 0 \vee z^2 + 3z + 1 = 0 \vee z^2 - 3z + 1 = 0$$

$$z = i \vee z = -i \vee z = \frac{-3 + \sqrt{5}}{2} \vee z = \frac{-3 - \sqrt{5}}{2} \vee \ z = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \vee z = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$$

$$Diferencia\ de\ raíces\ imaginarias: \ \ 2i$$

$$Módulo = 2$$

PITAGORAS ACADEMIA

PROBLEMA:

20. Si las raíces de la ecuación:

$$x^2 + px + q = 0$$

son también raíces de la ecuación bicuadrada:

$$x^4 - (p + 2)x^2 + 4 = 0 \ (p \wedge q \in \mathbb{R})$$

calcular el mínimo valor de: p + q.

A) 0 B) 2 C) 3
D) -3 E) -2

SOLUCIÓN:

$\alpha + \beta = -p$ $\alpha\beta = q$

$\alpha^2 + \beta^2 = p + 2$ $\alpha^2 . \beta^2 = 4$

De donde se obtiene: $q = 2 \ \vee \ q = -2$

Es decir: $\alpha\beta = 2 \ \vee \alpha\beta = -2$

Si $\alpha\beta = 2$

$$\alpha^2 + \beta^2 = p + 2$$
$$(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = p + 2$$
$$(-p)^2 - 2(2) = p + 2$$
$$p^2 - p - 6 = 0$$
$$p = 3 \ \vee p = -2$$

Si $\alpha\beta = -2$

$$\alpha^2 + \beta^2 = p + 2$$
$$(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = p + 2$$
$$(-p)^2 - 2(-2) = p + 2$$
$$p^2 - p + 2 = 0$$
$$p \notin \mathbb{R}$$

Mínimo valor de $p + q = -2 + 2 = 0$

REGLA DE SIGNOS DE DESCARTES

1.- La cantidad de raíces positivas de P(x) es igual al número de variaciones de signo en p(x)

2.- La cantidad de raíces negativas de P(x) es igual al número de variaciones de signo en p(-x)

EJM:

$$P(x) = x^5 + 4x^3 - 3x^2 - 4x + 1$$

Se observa: 2 variaciones de signo.
El número de raíces positivas puede ser 2 o 0.

EJM:

$$P(-x) = -x^5 - 4x^3 - 3x^2 + 4x + 1$$

Se observa: 1 variación de signo.
El número de raíces negativas es 1.